Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Tensoralgebra **2**
2.1 Tensoren 2. Stufe . . . 2
2.2 Tensorprodukt, dyadisches Produkt . . . 3
2.3 Hintereinanderschaltung und Umkehrung . . . 4
2.4 Skalarprodukt . . . 6
2.5 Tensoren höherer Stufe . . . 7

3 Invarianten, Eigenwerte und spektrale Darstellung **8**
3.1 Spur eines Tensors . . . 8
3.2 Invarianten von Tensoren 2. Stufe . . . 8
3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 10
3.4 Eigenwertprobleme für beliebige Tensoren . . . 10
3.5 Eigenwertprobleme für Tensoren 2. Stufe . . . 11
3.6 Cayley-Hamilton-Theorem . . . 12
3.7 Eigenwertproblem für symmetrische Tensoren . . . 12
3.8 Spektralzerlegung . . . 13

4 Tensoranalysis **13**
4.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 13
4.2 Produkt- und Kettenregel . . . 14
4.3 Ableitungen von Feldgrößen . . . 14
4.4 Definition des Nabla-Operators . . . 16
4.5 Ableitung der Invarianten eines Tensors . . . 18
4.6 Zusammenfassung für verschiedene Funktionen . . . 19
4.7 Rechenregeln . . . 21

1 Einleitung

Zur Definition von Operationen O geben wir die mengenwertigen **Definitions- und Wertebereiche** an:

$$\begin{aligned} O:\ \text{Definitionsbereich} &\to \text{Wertebereich} \\ \text{Argument} &\mapsto \text{Funktionswert} \end{aligned}$$

Beispiel: Addition

$$\begin{aligned} O:\ V\times V &\ \to\ V \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) &\ \mapsto\ O(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a}+\mathbf{b} := (a_k+b_k)\mathbf{e}_k \end{aligned}$$

Links und rechts des Äquivalenzzeichens stehen verschiedene Symbole für die gleiche Operation. Definiert wird sie durch die Rechenvorschrift rechts vom := Zeichen.

Definition 1.1. ***Vektorraum, linearer Raum***. Eine Menge V heißt K-Vektorraum oder Vektorraum über dem Körper K, wenn für sie zwei Operationen definiert sind. Als innere Verknüpfung eine *Addition*

$$\begin{aligned} +:& V\times V\to V \\ &(\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto u+v \end{aligned}$$

und als äußere Verknüpfung eine *Multiplikation mit Skalaren*

$$\begin{aligned} \cdot:& K\times V\to V \\ &(\lambda,\mathbf{u})\mapsto \lambda\cdot\mathbf{u} \end{aligned}$$

wobei für alle $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ und $\alpha,\beta\in K$ gelten muss

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u} \\ (\alpha\beta)\,\mathbf{u} &= \alpha\,(\beta\mathbf{u}) \\ 1\cdot\mathbf{u} &= \mathbf{u} \\ \alpha\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}\ . \end{aligned}$$

Die Operation $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ wird abgekürzt zu $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, wodurch gewissermaßen die Vektorsubtraktion definiert ist.

Definition 1.2. ***lineare Abbildung:*** Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f: V\to W$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $x,y\in V$ und $a\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f\,(x+y) &= f\,(x)+f\,(y) && \text{additiv} \\ af\,(x) &= f\,(ax) && \text{homogen} \end{aligned}$$

Die Überlagerung zweier linearer Abbildungen ist wieder linear.
Für endlichdimensionale Vektorräume V,W mit $\dim V=n$, $\dim W=m$ und Basen $\mathcal{G}=\{g_1,\dots,g_n\}$ und $\mathcal{G}'=\{g'_1,\dots,g'_m\}$ kann jede lineare Abbildung $f\colon V\to W$ durch eine $m\times n$-Matrix dargestellt werden.

2 Tensoralgebra

2.1 Tensoren 2. Stufe

Definition 2.1. ***Tensor 2. Stufe:*** Betrachten wir die Menge der linearen Abbildungen eines Vektors $\mathbf{x}\in V$ in einen anderen Vektor $\mathbf{y}\in V$ und nennen sie $\mathbb{L}\mathrm{in}$. Schreiben wir nun

$$\begin{aligned} \mathbf{A}:&\ V\to V \\ &\mathbf{x}\mapsto\mathbf{y}:=\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{y}\in V,\ \forall\mathbf{x}\in V \end{aligned}$$

dann ist $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ ein Tensor 2. Stufe. Die Menge aller Tensoren 2. Stufe nennen wir $\mathbb{L}\mathrm{in}$.
Aus der Linearität der Abbildung folgen unmittelbar Additivität und Homogenität.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$$
$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Die Überlagerung (Summe) zweier Tensoren ist wieder ein Tensor.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$$

Für die Tensorensubtraktion sowie den *Nulltensor* folgern wir aus der Definition

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$$
$$\mathbf{0}\mathbf{x} = 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Ein Tensor $\mathbf{I} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ heißt *Identitäts-* oder *Einheitstensor* wenn er einen Vektor auf sich selbst abbildet.

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Die Addition von Tensoren 2. Stufe und ihre Skalarmultiplikation haben die folgenden **Eigenschaften**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + (\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}) && \text{assoziativ}\\
\alpha(\beta\mathbf{A}) &= (\alpha\beta)\mathbf{A} &&\\
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} && \text{kommutativ}\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{v}+\mathbf{B}\mathbf{v} && \text{distributiv in Vektor}\\
\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} && \text{distributiv in Skalar}\\
(\alpha+\beta)\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} &&\\
\mathbf{0}+\mathbf{A} &= \mathbf{A} && \text{neutrales Element}\\
1\mathbf{A} &= \mathbf{A} &&\\
\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) &= 0 && \text{negatives Element}
\end{aligned}$$

Beispiel: Rotation eines Vektors
Wie Vektoren lassen sich auch Tensoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen (Basen) darstellen. Die Basisdarstellung von Tensoren ist nicht Gegenstand dieser kurzen Zusammenfassung, wir beschränken uns deshalb auf die symbolische Notation.

2.2 Tensorprodukt, dyadisches Produkt

Man kann zwei Vektoren $\mathbf{a} \in V$ und $\mathbf{b} \in V$ mit einem dritten Vektor so verknüpfen, dass wieder ein Vektor entsteht, $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Dann kann man $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zu einem Tensor formen.

Definition 2.2. ***dyadisches Produkt, Tensorprodukt*** Eine Abbildung heißt dyadisches Produkt

$$\otimes : V \times V \to \mathbb{L}\mathrm{in}$$
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} := (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{x} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in V$$

Der Ausdruck $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ wird als Dyade bezeichnet.
Eine Dyade erfüllt die Linearitätsbedingungen und ist also eine lineare Abbildung. Es gilt

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{x} + (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{y}$$
$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{x}$$

und folglich ist die Dyade ein Tensor. Darüberhinaus hat sie die Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \\
\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \\
\mathbf{A}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{A}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Es gelten die folgenden **Rechenregeln**:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} \otimes (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \\
(\alpha \mathbf{a}) \otimes (\beta \mathbf{b}) &= \alpha\beta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})
\end{aligned}
$$

sowie

$$
(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}
$$

Beispiel: Veranschaulichung mit Spalten- und Zeilenvektor

2.3 Hintereinanderschaltung und Umkehrung

Definition 2.3. ***Hintereinanderschaltung, einfache Kontraktion, einfache Überschiebung:*** Es seien die Tensoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$. Der Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ heißt Überlagerung von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ wenn gilt

$$
\mathbf{C} = \mathbf{AB} \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in V
$$

Man sagt, dass Tensor $\mathbf{A}$ angewandt auf Tensor $\mathbf{B}$ Tensor $\mathbf{C}$ ergibt.
Die Hintereinanderschaltung von Tensoren hat folgende Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= (\mathbf{AB})\mathbf{C} && \text{assoziativ} \\
\alpha\mathbf{AB} &= (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) && \text{assoziativ in Skalar} \\
\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} && \text{distributiv} \\
\mathbf{AI} &= \mathbf{IA} = \mathbf{A} && \text{neutrales Elemen}t \\
\mathbf{A0} &= \mathbf{0A} = \mathbf{0} && \text{Nullelement}
\end{aligned}
$$

Im allgemeinen gilt $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Ist jedoch $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, dann heißen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ *kommutative Tensoren.*
Potenzen von Tensoren 2. Stufe: Mit der Überschiebung von Tensoren definiert man einen Tensor in der m-ten Potenz als

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^m &= \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{\text{m-mal}} \\
\mathbf{A}^0 &= \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^k \mathbf{A}^l &= \mathbf{A}^{k+l} \\
(\alpha\mathbf{A})^k &= \alpha^k \mathbf{A}^k
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Potenzen von Tensoren lassen sich über Polynomreihen diverse Tensorfunktionen definieren, z.B. die *Exponentialfunktion* eines Tensors $\mathbf{A}$

$$
\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k
$$

sowie seinen *natürlichen Logarithmus* (nur um den Entwicklungspunkt $\mathbf{I}$)

$$\ln(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Big(\mathbf{A} - \mathbf{I}\Big)^k$$

Ebenso definiert man *trigonometrische Funktionen* von Tensoren.

$$\sin(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!}$$

Definition 2.4. ***Umkehrung, Inverse:*** Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ und gelte

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

für seine Inverse $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{L}\text{in}$ gilt (wenn sie existiert)

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Existiert $\mathbf{A}^{-1}$, dann heisst $\mathbf{A}$ invertierbar. Die Menge aller invertierbaren Tensoren nennen wir $\mathbb{I}\text{nv} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in} : \exists \mathbf{A}^{-1}\}$.
Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{I}\text{nv}$ gilt ebenso

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Die Inversen von Tensoren sind eindeutig, was man über Annahme des Gegenteils und die Definition leicht beweisen kann. Speziell für die Inverse von $\mathbf{I}$ gilt, dass $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$.

Definition 2.5. ***Transponierte:*** Die Transponierte eines Tensors ist definiert mittels

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{A} \qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Man kann ebenfalls fordern

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{A}^T \qquad \forall\, \mathbf{y} \in V$$

oder, gleichermaßen, über das Skalarprodukt der Vektoren

$$\mathbf{y} \cdot \Big(\mathbf{A}^T\mathbf{x}\Big) = \mathbf{x} \cdot \Big(\mathbf{A}\mathbf{y}\Big).$$

Daraus folgen die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{T^T} &= \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A}\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ (\alpha\mathbf{A})^T &= \alpha\mathbf{A}^T \end{aligned}$$

Ein Tensor heißt **symmetrisch** wenn

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A},$$

er heißt **antimetrisch** oder schiefsymmetrisch, wenn

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$$

Jeder Tensor lässt sich eindeutig in symmetrische und antimetrische Teile zerlegen.

$$\begin{aligned}\operatorname{sym}(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\\ \operatorname{skw}(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)\end{aligned}$$

Die Menge der symmetrischen Tensoren $\mathbf{A}$ sei $\mathbb{S}\mathrm{ym} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in},\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\}$, die Menge der schiefsymmetrischen Tensoren sei $\mathbb{S}\mathrm{kw} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in},\ \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}$.
Beispiel: Verschiebungsgradient ebene Bewegung

Definition 2.6. ***Orthogonaler Tensor:*** Ein Tensor $\mathbf{Q} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ für den gilt

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$$

heißt orthogonal, wenn

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Man kann ebenfalls fordern

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$$

Die Menge der orthogonalen Tensoren sei $\mathbb{O}\mathrm{rth} = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{L}\mathrm{in},\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}\}$.
Beispiel: Rotationstensor ebene Bewegung

2.4 Skalarprodukt

Definition 2.7. ***Skalarprodukt, doppelte Überschiebung:*** Gegeben seien zwei Dyaden $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ und $\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$. Das Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ ist

$$\begin{aligned}(\cdot : \cdot) :&\mathbb{L}\mathrm{in} \times \mathbb{L}\mathrm{in} \to \mathbb{R}\\ &\mathbf{A} : \mathbf{B} \mapsto \alpha\\ &(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\end{aligned}$$

Ausgedrückt mit $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ führt das auf die Beziehung

$$\mathbf{A} : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{d}\mathbf{A}^T\mathbf{c}.$$

Das Skalarprodukt führt für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ auf folgende Identitäten,

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B^{ij} = A^{ij}B_{ij} = A^i_jB^j_i = A^j_iB^i_j$$

die auch dann gelten, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nicht als Dyade dargestellt sind.
Die Notation für eine Skalarprodukt ist nicht einheitlich. Ein „:“ oder „··“ beschreibt ein Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 2. Stufe, wir betrachten beide Symbole als gleich. Ein „·“ drückt meist ein Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 1. Stufe aus, wird mitunter aber auch zwischen Tensoren 2.

Stufe verwendet und meint dann entweder ein Skalarprodukt oder eine einfache Überschiebung. Die Nutzung der „:" ist anschaulich, wenn man sich vor Augen hält, dass ein Skalarprodukt von Tensoren immer einen Skalar erzeugt, was bei einem Tensor 2. Stufe eine Reduktion um zwei Stufen bedeutet (zwei Stufen, zwei Punkte). Bei einem Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 1. Stufe reduziert sich die Stufe um eins (eine Stufe, ein Punkt).
Das Skalarprodukt hat die **Eigenschaften**:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}:\mathbf{B} &= \mathbf{B}:\mathbf{A} && \text{kommutativ} \\ \mathbf{A}:(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}:\mathbf{B}+\mathbf{A}:\mathbf{C} && \text{distributiv} \\ \alpha(\mathbf{A}:\mathbf{B}) &= (\alpha\mathbf{A}):\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) && \text{assoziativ für Skalar} \\ \mathbf{A}:\mathbf{A} &\geq 0 && \forall \mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in} \\ \mathbf{A}:\mathbf{A} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{0} \end{aligned}$$

Mittels Komponentendarstellung lassen sich diese Beziehungen leicht beweisen.
Das Skalarprodukt definiert **Abstand** und **Winkel** von Tensoren. Eine Norm eines Tensors („Abstand") ist gegeben mit

$$\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{A}:\mathbf{A})^{\frac{1}{2}}.$$

Der Winkel zwischen zwei Tensoren berechnet sich aus

$$\angle(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \arccos\frac{\mathbf{A}:\mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}$$

2.5 Tensoren höherer Stufe

In Analogie zu den Tensoren 2. Stufe, $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$, lassen sich auch Tensoren weiterer Stufen als lineare Abbildungen definieren.

$k = 0:$ *Skalar*

$\overset{<0>}{\mathbf{A}}: \quad \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$

$k = 1:$ *Vektor*

$\overset{<1>}{\mathbf{A}}: \quad V \quad \rightarrow \quad V$

Repräsentation z.B.: $\overset{<1>}{\mathbf{A}} = a_i \mathbf{g}^i$

Vektoren bestehen aus 3 Komponenten.

$k = 2:$ *Dyade*

$\overset{<2>}{\mathbf{A}}: \quad V \times V \quad \rightarrow \quad \mathbb{L}\mathrm{in}$

Repräsentation z.B.: $\overset{<2>}{\mathbf{A}} = A_{ik}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k$

Dyaden bestehen aus 9 Komponenten.

$k = 3:$ *Triade*

$\overset{<3>}{\mathbf{A}}: \quad V \times V \times V \quad \rightarrow \quad V^3$

Repräsentation z.B.: $\overset{<3>}{\mathbf{A}} = A_{ikl}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$

Triaden bestehen aus 27 Komponenten.

$k = 4:$ *Tetraden*

$\overset{<4>}{\mathbf{A}} : \quad V \times V \times V \times V \quad \to \quad V^4$

Repräsentation z.B.: $\overset{<4>}{\mathbf{A}} = A_{iklm}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m$

Tetraden bestehen aus 81 Komponenten.

$k > 4:$ *Tensoren höherer Stufe*

$\overset{<k>}{\mathbf{A}} : \quad V^n \quad \to \quad V^n$

Repräsentation z.B.: $\overset{<n>}{\mathbf{A}} = A_{ik\ldots n}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k \otimes \ldots \otimes \mathbf{g}^n$

Tensoren n-ter Stufe bestehen aus 3^n Komponenten.

3 Invarianten, Eigenwerte und spektrale Darstellung

3.1 Spur eines Tensors

Definition 3.1. ***Spur eines Tensors:*** Gegeben sei ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$. Als Spur des Tensors bezeichnet man sein Skalarprodukt mit dem Einheitstensor.

$$\begin{aligned} \text{tr} :& \mathbb{L}\text{in} \to \mathbb{R} \\ & \text{tr}(\mathbf{A}) \mapsto \alpha := \mathbf{A} : \mathbf{I} \end{aligned}$$

Die Spur eines Tensors ist unabhängig von seiner Basisdarstellung. Speziell gilt für eine Dyade

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

sowie allgemein

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \text{tr}(\mathbf{AB}) &= \mathbf{AB} : \mathbf{I} = \mathbf{A} : \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T : \mathbf{B} = \mathbf{BA} : \mathbf{I} \\ &= \text{tr}(\mathbf{BA}) \\ \text{tr}\mathbf{A} &= \text{tr}\mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Beispiel: Spur des Dehnungstensor

3.2 Invarianten von Tensoren 2. Stufe

Satz: Für jeden Tensor 2. Stufe $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ gibt es genau drei Abbildungen. I_A, II_A, III_A: $\mathbb{L}\text{in} \to \mathbb{R}$, die $\mathbf{A}$ eine reelle Zahl zuordnen. Wir betrachten hier die Hauptinvarianten und definieren sie über die Spur des Tensors.
Beweis: Über Linearität des Spatprodukts $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ mit jeweils einem Vektor durch $\mathbf{d} = \mathbf{Aa}$ etc. ersetzt, berechnet man die drei Hauptinvarianten. Andere Definitionen der Invarianten sind auch möglich. Ebenso kann der Beweis über die Cayley-Hamilton-Gleichung geführt werden (siehe unten).
1. Invariante: Spur des Tensors $\text{tr}\mathbf{A} = I_A$

$$I_A = \text{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Jeder Tensor $\mathbf{A}$ kann eindeutig zerlegt werden in einen Kugeltensor und einen spurfreien Deviator. Der *Kugeltensor* von $\mathbf{A}$ ist

$$\mathbf{A}^\circ = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{I}\ .$$

Der *Deviator* $\mathrm{dev}\mathbf{A} = \mathbf{A'}$ von $\mathbf{A}$ folgt als

$$\begin{aligned}\mathbf{A'} &= \mathbf{A} - \mathbf{A}^\circ \\ &= \mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{I}\ .\end{aligned}$$

2. Invariante II_A:

$$\begin{aligned}II_A &= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}^2(\mathbf{A}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big((I:\mathbf{A})^2 - I:\mathbf{A}^2\Big)\end{aligned}$$

Für die zweite Invariante eines spurfreien Tensor gilt:

$$II_A = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\mathbf{A}^2\Big) = -\frac{1}{2}\|\mathbf{A'}\|^2 = -\frac{1}{2}\|\mathbf{A}\|^2$$

3. Invariante Determinante des Tensors $\det\mathbf{A} = III_A$:

$$\begin{aligned}III_A &= \frac{1}{6}\mathrm{tr}^3(\mathbf{A}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{A}^3 \\ &= \frac{1}{6}\Big(\mathbf{I}:\mathbf{A}\Big)^3 - \frac{1}{2}\Big(\mathbf{I}:\mathbf{A}\Big)\Big(\mathbf{I}:\mathbf{A}^2\Big) + \frac{1}{3}\Big(\mathbf{I}:\mathbf{A}^3\Big) \\ &= \det\mathbf{A}\end{aligned}$$

Die Determinante ist eine nichtlineare Abbildung $\mathbb{L}\mathrm{in} \to \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\det\mathbf{A} &= \det\mathbf{A}^T \\ \det(\mathbf{BA}) &= \det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} \\ \det(\alpha\mathbf{A}) &= \alpha^3\det\mathbf{A}\end{aligned}$$

Ist $\det\mathbf{A} \neq 0$, dann ist $\mathbf{A}$ invertierbar.

Definition 3.2. ***unimodularer Tensor:*** Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ heißt unimodular, wenn

$$\det\mathbf{A} = 1.$$

Jeder invertierbare Tensor kann so zerlegt werden, dass man einen unimodularen Tensor erhält.

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\frac{1}{(\det\mathbf{A})^{\frac{1}{3}}} = III_A^{-\frac{1}{3}}\,\mathbf{A}$$

Beispiel: Drehtensor, (echt) orthogonale Tensoren

Für die Invarianten des invertierten Tensors $\mathbf{A}^{-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}I_{(A^{-1})} &= \frac{II_A}{III_A} \\ II_{(A^{-1})} &= \frac{I_A}{III_A} \\ III_{(A^{-1})} &= \frac{1}{III_A}\end{aligned}$$

Für die Invarianten des Deviator $\mathbf{A}'$ eines Tensors $\mathbf{A}$ gilt:

$$\begin{aligned} I_{A'} &= 0 \\ II_{A'} &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{A}'^2) \\ III_{A'} &= \frac{1}{3}\det(\mathbf{A}'^3) \end{aligned}$$

Für den Einheitstensor $\mathbf{I}$ gilt:

$$\begin{aligned} I_I &= 3 \\ II_I &= 3 \\ III_I &= 1 \end{aligned}$$

3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Eigenvektor eines Tensors ist ein von Null verschiedener Vektor, dessen Richtung durch den Tensor nicht verändert wird. Ein Eigenvektor wird also nur gestreckt, und man bezeichnet den Streckungsfaktor als Eigenwert des Tensors.
Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen. In vielen Anwendungen beschreiben Eigenwerte physikalische Eigenschaften eines mathematischen Modells.
Beispiel: Hauptspannungen, Knicklast und -form

Definition 3.3. ***Eigenvektoren und Eigenwerte von Tensoren 2. Stufe:*** Ein Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ heißt (rechter) Eigenvektor von $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$, wenn ein Skalar λ existiert, so dass

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}} = \lambda\hat{\mathbf{n}} \qquad\qquad \hat{\mathbf{n}} \neq \mathbf{0}$$

Häufig normiert man Eigenvektoren, also $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$. Ein Vektor $\hat{\mathbf{n}}^*$ heißt linker Eigenvektor, wenn

$$\hat{\mathbf{n}}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\hat{\mathbf{n}}^* = \lambda\hat{\mathbf{n}}^*$$

Der Skalar λ heißt Eigenwert von $\mathbf{A}$. Die Beziehung

$$\Big(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}\Big)\hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad\qquad \text{mit } i = 1,\,2,\,3$$

definiert die Eigenwerte.

3.4 Eigenwertprobleme für beliebige Tensoren

Für Tensoren gerader Stufe $< 2k >$ lassen sich Eigenwerte und -vektoren verallgemeinern.

Definition 3.4. ***Eigenvektoren und Eigenwerte von Tensoren 2k. Stufe:*** Ein Tensor $\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}}$ heißt (rechter) Eigentensor eines Tensores $\overset{<2k>}{\mathbf{A}}$, wenn ein Skalar λ existiert, so dass

$$\overset{<2k>}{\mathbf{A}}\;\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}} = \lambda\,\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}} \qquad\qquad \overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}} \neq \overset{<k>}{\mathbf{0}}$$

Analog heißt $\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}}{}^*$ linker Eigentensor, wenn

$$\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}}{}^*\;\overset{<2k>}{\mathbf{A}} = \lambda\,\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}}{}^*$$

Die Eigenwertgleichung lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$\Big(\overset{<2k>}{\mathbf{A}} - \lambda_i \overset{<2k>}{\mathbf{I}}\Big)\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}} = 0 \qquad\qquad \text{mit } i = 1,\, 2,\, 3 \ldots 3k$$

Bedingung für eine nichttriviale Lösung $\overset{<k>}{\hat{\mathbf{n}}} \neq 0$ ist, dass

$$\det\Big(\overset{<2k>}{\mathbf{A}} - \lambda_i \overset{<2k>}{\mathbf{I}}\Big) = 0$$

wird. Lässt sich die Determinante entwickeln, so erhält man ein charakteristisches Polynom. Durch Einsetzen in das entsprechende linke Eigenwertproblem bekommt man das selbe Polynom.

3.5 Eigenwertprobleme für Tensoren 2. Stufe

Für einen Tensor 2. Stufe folgen die Eigenwerte aus dem charakteristische Polynom zur Gleichung

$$\det\Big(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\Big) = 0 \ .$$

Zur Berechnung der Eigenwerte λ_i entwickelt man

$$\begin{aligned}\det\Big(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\Big) &= \alpha\lambda_i^3 + \beta\lambda_i^2 + \gamma\lambda_i + \delta \\ &\vdots \\ &= -\lambda_i^3 + I_A\lambda_i^2 - II_A\lambda_i + III_A\end{aligned}$$

und erhält ein kubisches Polynom, wobei I_A, II_A, III_A die *Hauptinvarianten* definieren. Somit erhalten wir die λ_i, $i = 1, 2, 3$ aus der Lösung des charakteristisches Polynoms.

$$\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = 0$$

Aus dem charakteristischen Polynom folgt mittels *Vieta*'schem Wurzelsatz

$$\lambda^3 - I_A\lambda^2 + II_A\lambda - III_A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

und für die Darstellung der Invarianten:

$$\begin{aligned}I_A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ II_A &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ III_A &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

Jeder Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ hat 3 (unter Umständen gleiche) Eigenwerte. Speziell gilt:

- 1 reeller Eigenwert, 2 konjugiert komplexe Eigenwerte *oder*
- 3 reelle Eigenwerte, wenn $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

Die Eigenvektoren der verschiedenen Eigenwerte von symmetrischen Tensoren sind zueinander orthogonal. Außerdem gilt:

- Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ ist invertierbar, wenn $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$.
- Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind auch Eigenwerte von $\mathbf{A}^T$.
- Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3, \ldots$ sind λ_i^2, $\lambda_i^3, \ldots$.

Definition 3.5. ***ähnliche Tensoren:*** Zwei Tensoren $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{L}\text{in}$ heißen ähnlich, wenn

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \qquad \mathbf{B} \in \mathbb{L}\text{in}.$$

Ähnliche Tensoren haben die gleichen Invarianten und Eigenwerte.

Definition 3.6. ***koaxiale Tensoren:*** Zwei Tensoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{L}\text{in}$ sind koaxial, wenn gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}\,.$$

Koaxiale Tensoren haben die gleichen Eigenvektoren. Koaxiale Tensoren zu $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ sind beispielsweise $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\alpha\mathbf{A}$.

3.6 Cayley-Hamilton-Theorem

Aus dem Eigenwertproblem $\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}} = \lambda\hat{\mathbf{n}}$ folgt $\mathbf{A}^n\hat{\mathbf{n}} = \lambda^n\hat{\mathbf{n}}$. Setzt man dies nun in das charakteristische Polynom ein, erhält man

$$\mathbf{A}^3 - I_A\mathbf{A}^2 + II_A\mathbf{A} - III_A\mathbf{I} = 0\ .$$

Man bezeichnet dieses Polynom als Minimalpolynom oder *Cayley-Hamilton-Gleichung*. Unmittelbar folgt, dass sich jeder Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ in die 1., 2. und 3. Potenz auflösen lässt. Es sind keine höheren Potenzen zu seiner Darstellung nötig.
Für invertierbare Tensoren gilt die Cayley-Hamilton-Gleichung mit $\mathbf{A}^{-1}$ multipliziert, also

$$\mathbf{A}^2 - I_A\mathbf{A} + II_A\mathbf{I} - III_A\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}.$$

Das Cayley-Hamilton-Theorem besagt also, dass jeder Tensor zweiter Stufe seine eigene charakteristische Gleichung erfüllt bzw. dass jeder Tensor zweiter Stufe Nullstelle seines charakteristischen Polynoms ist.

3.7 Eigenwertproblem für symmetrische Tensoren

Bei symmetrischen Tensoren sind das linke und das rechte Eigenwertproblem gleich.

$$\hat{\mathbf{n}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{n}} = \lambda\hat{\mathbf{n}}$$

Wenn λ und $\hat{\mathbf{n}}$ der Eigenwert und Eigenvektor und $\overline{\lambda}$ und $\overline{\hat{\mathbf{n}}}$ ihr konjugiert komplexer Gegenpart ist, dann gilt

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}} = \lambda\hat{\mathbf{n}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A}\overline{\hat{\mathbf{n}}} = \overline{\lambda\hat{\mathbf{n}}}\ .$$

Nach Multiplikation mit $\overline{\hat{\mathbf{n}}}$ bzw $\hat{\mathbf{n}}$ ergibt sich daraus:

$$\overline{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}} = \lambda\overline{\hat{\mathbf{n}}}\,\hat{\mathbf{n}} \qquad \text{und} \qquad \hat{\mathbf{n}}\mathbf{A}\overline{\hat{\mathbf{n}}} = \overline{\lambda}\hat{\mathbf{n}}\,\overline{\hat{\mathbf{n}}}\ .$$

Aus der Differenz der beiden Gleichungen folgt:

$$(\lambda - \overline{\lambda})\hat{\mathbf{n}}\,\overline{\hat{\mathbf{n}}} = 0\,.$$

Da $\hat{\mathbf{n}}\,\overline{\hat{\mathbf{n}}}$ nicht Null sein muss, folgt daraus, dass $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ gelten muss, also $\mathrm{Im}(\overline{\lambda}) = 0$. Symmetrische Tensoren haben folglich reelle Eigenwerte.
Auf ähnliche Weise lässt sich

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0$$

zeigen. Daraus ergibt sich, dass $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0$ sein muss, d.h. $\hat{\mathbf{n}}_1 \perp \hat{\mathbf{n}}_2$. Die Eigenvektoren sind gegenseitig orthogonal.

3.8 Spektralzerlegung

Definition 3.7. ***spektrale Zerlegung:*** Eine Darstellung eines Tensors $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ als Summe der Produkte aus Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren $\widehat{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widehat{\mathbf{n}}_i \otimes \widehat{\mathbf{n}}_i$$

nennt man spektrale Zerlegung. Jeder symmetrische Tensor $\mathbf{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ kann als spektrale Zerlegung dargestellt werden.
Beweis: Über die Komponentendarstellung von $\mathbf{A}$ in der orthogonalen Basis $\widehat{\mathbf{n}}_i \otimes \widehat{\mathbf{n}}_i$

$$\mathbf{A} = A_{ij} \widehat{\mathbf{n}}_i \otimes \widehat{\mathbf{n}}_j \qquad \Rightarrow \qquad A_{ij} = \widehat{\mathbf{n}}_i \mathbf{A} \widehat{\mathbf{n}}_j$$

mit $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{n}}_j = \lambda_j \widehat{\mathbf{n}}_j$ erhält man

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \widehat{\mathbf{n}}_i \lambda_j \widehat{\mathbf{n}}_j \\ &= \lambda_j g_{ij} \overset{\text{orthonormal}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Diagonalenelemente sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Hier wurde ausgenutzt, das jede orthogonale Basis orthonormalisiert werden kann, $g_{ij} = 1$.
Jeder Tensor, der mittels Spektraldarstellung dargestellt werden kann heißt *diagonalisierbar*. Nicht diagonalisierbar sind z.B. Tensoren der Form $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ mit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, da die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dann in einer Ebene liegen.

4 Tensoranalysis

Zunächst erweitern wir die bekannten Konzepte reeller Funktionen auf vektor- und tensorwertige Funktionen. Gegeben sei für $t \in \mathbb{R}$ eine reelle, vektorwertige Funktion $\mathbf{x}(t)$ mit

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \to V$$

sowie eine reelle, tensorwertige Funktion $\mathbf{A}(t)$ mit

$$\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{L}\text{in}.$$

4.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition 4.1. ***Stetigkeit:*** Eine Funktion heißt stetig, wenn in jedem Punkt ihres Gebietes ein Grenzwert existiert mit:

$$\lim_{t \to t_0} \Big(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) \Big) = 0$$
$$\lim_{t \to 0} \Big(\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(t_0) \Big) = 0$$

Definition 4.2. ***Differenzierbarkeit:*** Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn die folgenden Grenzwerte existieren und endlich sind:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t) \Big) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t) \Big) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$$

4.2 Produkt- und Kettenregel

Es gelten die üblichen Differentiationsregeln. Die **Produktregel** oder **Leibnizregel** führt die Berechnung der Ableitung eines Produktes von Funktionen auf die Berechnung der Ableitung der einzelnen Funktionen zurück.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\alpha(t)\cdot\mathbf{x}(t)\Big) &= \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{x}(t)+\alpha(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\alpha(t)\cdot\mathbf{A}(t)\Big) &= \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{A}(t)+\alpha(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha\in\mathbb{R}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{x}(t)\Big) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{x}(t)+\mathbf{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

usw. für alle sinnvollen Produkte. Speziell gilt für die **Ableitung des Skalarprodukts** von Vektoren und Tensoren

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\Big) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{A}:\mathbf{B}\Big) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}:\mathbf{B}+\mathbf{A}:\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

und für die **Ableitung eines Tensorprodukts**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}\Big) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\otimes\mathbf{y}+\mathbf{x}\otimes\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}$$

sowie für die **Ableitung der Hintereinanderschaltung**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{A}\mathbf{B}\Big) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}+\mathbf{A}\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}.$$

Die **Kettenregel** dient der Ableitung von Funktionen von Funktionen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}\Big(u(t)\Big) &= \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\Big(u(t)\Big) &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

sowie der Ableitung von Funktionen, die sich selbst als Verkettung von (zwei) differenzierbaren Funktionen darstellen lassen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}\Big(u(t),\,v(t)\Big) &= \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\Big(u(t),\,v(t)\Big) &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung ist jeweils durch Festhalten des anderen Arguments definiert, $u,\,v\in\mathbb{R}$.

4.3 Ableitungen von Feldgrößen

Im folgenden seien die Argumente der vektorwertigen Funktionen und tensorwertigen Funktionen Vektoren.

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &: V\to\mathbb{R} && \text{Skalarfeld}\\
\mathbf{x}(\mathbf{r}) &: V\to V && \text{Vektorfeld}\\
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &: V\to\mathbb{L}\mathrm{in} && \text{Tensorfeld}
\end{aligned}$$

Definition 4.3. ***Gâteaux-Ableitung:*** Für Skalar-, Vektor- und Tensorfelder ist das Gâteaux-Differenzial an der Stelle $\mathbf{r}$, falls es dort existiert, definiert durch den Grenzwert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\varphi(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[\varphi(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})-\varphi(\mathbf{r})\Big]$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathbf{x}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[\mathbf{x}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})-\mathbf{x}(\mathbf{r})\Big]$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathbf{A}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})-\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big]$$

Ist die Funktion differenzierbar, so existiert auch die Gâteaux-Ableitung. Umgekehrt reicht deren Existenz für die Differenzierbarkeit nicht hin, es ist zusätzlich die Stetigkeit in $\mathbf{a}$ erforderlich. Die Gateaux-Ableitung ist eine Verallgemeinerung des üblichen Differentiationskonzept auf verallgemeinerte Funktionen und auf unendlichdimensionale Räume.
Hier betrachten wir endlichdimensionale Vektorräume mit $\mathbf{r},\mathbf{a}\in V$ und hinreichender Stetigkeit. Dann ist das Gâteaux-Differenzial gleich der **ersten Variation** der Feldgröße. Entsprechend seiner physikalischen Bedeutung bezeichnet man das Differenzial auch als **Richtungsableitung** and der *Stelle* $\mathbf{r}$ in *Richtung* $\mathbf{a}$.

$$\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a})-f(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad \forall\mathbf{a}\in V_0$$

Die Richtungsableitung ist homogen

$$\mathrm{d}f(\mathbf{r};\alpha\,\mathbf{a}) = \alpha\;\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a})$$

und linear im zweiten Argument, dem Zuwachs. Folglich gilt im Sinne eines Distributivgesetzes, $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\forall\,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\in V$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2) &= \mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}_1)+\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}_2)\\ \mathrm{d}f(\mathbf{r};\alpha_1\,\mathbf{a}_1+\alpha_2\,\mathbf{a}_2) &= \alpha_1\,\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}_1)+\alpha_2\,\mathrm{d}f(\mathbf{r};\mathbf{a}_2)\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung einer Feldgröße ist die Änderungsrate dieser Funktion in einer durch einen Vektor vorgegebenen Richtung. Im $\mathbb{R}^3$ ist das Argument $\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{a}$ oder auch $\mathbf{r}+\epsilon\mathrm{d}\mathbf{r}$ eine *Gerade*, daher heißt die Richtungsableitung auch Tangentenableitung oder Linearisierung in Richtung $\mathbf{a}$ oder $\mathrm{d}\mathbf{r}$. Gleich bedeutend wird oft geschrieben:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{r};d\mathbf{r}) \equiv D_r f \equiv \delta f(\mathbf{r};d\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big[f(\mathbf{r}+\epsilon d\mathbf{r})\Big]_{\epsilon=0} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,f(\mathbf{r}+\epsilon\,d\mathbf{r})|_{\epsilon\to 0}\,.$$

Definition 4.4. ***totales Differenzial, vollständiges Differenzial:*** Die Richtungsableitung einer Größe $f(a,b,\dots)$ in alle Richtungen $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}b,\dots$ nennt man vollständiges Differenzial.

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial\mathbf{a}}\mathrm{d}\mathbf{a}+\frac{\partial f}{\partial\mathbf{b}}\mathrm{d}\mathbf{b}+\cdots$$

Das vollständige Differenzial einer Funktion ist eine lineare Abbildung (Linearform).
Weil für vollständig differenzierbare Feldfunktionen das vollständige Differenzial gleich der Richtungsableitung ist, werden beide gleich geschrieben. Die Berechnung der Richtungsableitung erfolgt z.B. mittels der Kettenregel.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}f(\mathbf{u}_0+\epsilon\mathbf{v})|_{\epsilon\to 0} = \frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}\cdot\frac{\partial(\mathbf{u_0}+\epsilon\mathbf{v})}{\partial\epsilon} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}}_{\mathrm{grad}\,f}\cdot\mathbf{v}$$

Die Richtungsableitung kann also durch den Gradienten ausgedrückt werden.

Definition 4.5. ***Gradient, Frechét-Ableitung:*** Der Gradient einer Feldfunktion $\varphi(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{R} \in V$ ist ihre partielle Ableitung

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}$$

und definiert durch

$$\text{grad}\varphi \cdot \mathbf{a} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\Big[\varphi(\mathbf{r}+s\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{r})\Big].$$

Analog gilt die Definition des Gradienten von vektor- und tensorwertige Feldfunktionen grad $\mathbf{x}$, grad $\mathbf{A}$. Der Gradient ist ein (punktweise) linearer Operator.

$$\Big(\mathbf{f}_1(\mathbf{r}) + \alpha\mathbf{f}_2(\mathbf{r})\Big)' = \mathbf{f}_1'(\mathbf{r}) + \alpha\mathbf{f}_2'(\mathbf{r})$$

und der Gradient der Inversen ist auch die Inverse des Gradienten.

$$(\mathbf{f}^{-1})' = (\mathbf{f}')^{-1}$$

Für den Gradienten gelten im übertragenden Sinne die oben aufgeführten **Rechenregeln**. Die **Produktregel** erklärt, das die Hintereinanderschaltung innerhalb einer Ableitung, der Hintereinanderschaltung der Ableitungen entspricht.

$$(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})' = \frac{\partial}{\partial\mathbf{g}}\mathbf{f} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{g} = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{r})$$

Sie gilt für beliebige sinnvolle Produkte von Gradienten.

$$\Big(\mathbf{S}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{T}(\mathbf{r})\Big)' = \mathbf{S}'(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{T}(\mathbf{r}) + \mathbf{S}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{T}'(\mathbf{r})$$

Mit der **Kettenregel** erhält man den Gradienten durch Multiplikation der Ableitungen aller ineinander verketteten Funktionen.

4.4 Definition des Nabla-Operators

Definition 4.6. Nabla ***Operator:*** Der Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ wird benutzt, um die drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation zu bezeichnen. Formal kann der Nabla-Operator als ein Vektor aufgefasst werden, dessen Komponenten partiellen Ableitungen sind. Im $\mathbb{R}^n$ liefert das formale Produkt von $\boldsymbol{\nabla}$ mit einem Skalarfeld f (also das komponentenweise Ausführen der Ableitungen) dessen Gradienten.

$$\boldsymbol{\nabla} f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T \tag{1}$$

Generell formuliert man:

$$\boldsymbol{\nabla}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial r^i}\mathbf{g}^i \qquad \text{allgemeine Darstellung}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 \qquad \text{karthesische Darstellung}$$

Angewandt auf ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in V$ ergeben sich verschiedene Differentialoperatoren. Sie sind im folgenden in kartesischen Koordinaten dargestellt.

Divergenz eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{aligned}$$

Die Divergenz ordnet einem Vektor ein Skalar zu, das die Entstehung oder Vernichtung einer physikalischen Größe beschreibt. Ist $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, dann nennt man das Vektorfeld $\mathbf{u}$ quellenfrei.

Rotation eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Die Rotation eines Vektorfeldes $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ bzw. in englischen Texten $\operatorname{curl}\mathbf{u}$ ordnet einem Vektorfeld einen Vektor zu, der ein Drehgröße beschreibt (z.B. die Winkelgeschwindigkeit). Ergibt sich $\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$, dann heißt das Vektorfeld $\mathbf{u}$ wirbelfrei.

Gradient eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Gradient eines Vektorfeldes $\operatorname{grad}\mathbf{u}$ ordnet einem Vektorfeld einen Tensor zweiter Stufe zu. Er beschreibt die räumliche Änderung des Feldes. In Analogie zu (1) schreibt man häufig einfach $\operatorname{grad}\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}$. Es gilt auch

$$\operatorname{grad}^T\mathbf{u} = \mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\,.$$

Erfüllt ein Skalarfeld ϕ die Eigenschaften, dass $\operatorname{grad}\phi=\mathbf{u}$ dann ist ϕ ein *Potential* von $\mathbf{u}$. Ein Potential ist eine symmetrische Größe, es hat keine schiefsymmetrischen Anteile, $\operatorname{rot}\mathbf{u}=0$.
Divergenz und Gradient lassen sich analog auch für *Tensoren höherer Ordnung* definieren. Speziell berechnet für ein tensorwertiges Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x})\in\mathbb{L}\mathrm{in}$ seine Divergenz einen Vektor und sein Gradient eine Triade. Die Ableitungen für verschiedene Funktionen sind im letzten Abschnitt zusammengefasst.
Die zweifache Anwendung des Nabla-Operators führt auf Kombinationen der Differentialoperatoren div und grad. Aus den Definitionen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0\\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) &= 0\end{aligned}$$

und so verbleiben noch zwei wesentliche Operatoren.

Laplace-Operator eines Feldes

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)\\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\end{aligned}$$

Ist $\Delta\phi = 0$ dann heißt die Funktion ϕ *harmonisch*. Für Vektorfelder $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u} &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathbf{u}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) \\ &= \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) \\ \Delta(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + 2\operatorname{grad}\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{v}\end{aligned}$$

Der Laplace-Operator auf ein Skalarfeld angewandt liefert als Ergebnis wieder ein Skalarfeld, bei Anwendung auf ein Vektorfeld liefert er wieder ein Vektorfeld.
Hesse-Operator (Hesse-Matrix) eines Skalarfeldes

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}(\phi) = \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}(\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$$

Man beachte, dass die Operatoren Divergenz, Rotation und Gradient invariant sind, d.h., die obigen Definitionen sind vom gewählten Koordinatensystem unabhängig.

4.5 Ableitung der Invarianten eines Tensors

Die Invarianten eines Tensors, $\mathbf{A}\in\mathbb{L}\text{in}$, lassen sich als Funktion von Potenzen des Tensors $\mathbf{A}$ ausdrücken, vgl. Abschnitt 2.3.2. Folglich wollen wir hier die reelle Tensorfunktion

$$f(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{I} : \mathbf{A}^\alpha$$

ableiten. Beispielhaft bilden wir die Richtungsableitung für $\alpha = 3$, also $f = \operatorname{tr}\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} : \mathbf{A}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\mathbf{A}, d\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big[\mathbf{I} : \Big((\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A})\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}\Big) + \mathbf{I} : \Big(\mathbf{A}(\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A})\,\mathbf{A}\Big) + \mathbf{I} : \Big(\mathbf{A}\,\mathbf{A}(\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A})\Big)\Big]_{\epsilon\to 0} \\ &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big[(\mathbf{A}\,\mathbf{A})^T : (\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A}) + \mathbf{A}^T\,\mathbf{A}^T : (\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A})\Big) + (\mathbf{A}\,\mathbf{A})^T : (\mathbf{A}+\epsilon d\mathbf{A})\Big)\Big]_{\epsilon\to 0} \\ &= 3\mathbf{A}^{2T} : d\mathbf{A}\end{aligned}$$

Folglich lautet der Gradient $\operatorname{grad}(\operatorname{tr}\mathbf{A}^3) = 3\mathbf{A}^{2T}$. Die Verallgemeinerung auf beliebige α berechnet man entsprechend.

$$\operatorname{grad}\Big(\operatorname{tr}\mathbf{A}^\alpha\Big) = \alpha\operatorname{tr}\mathbf{A}^{\alpha-1}$$

Durch Anwenden der Produktregel kann man nun die Ableitung der Tensorinvarianten ermitteln.

$$\begin{aligned}\frac{dI_A}{d\mathbf{A}} &= \mathbf{I} \\ \frac{dII_A}{d\mathbf{A}} &= \operatorname{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{I} - \mathbf{A}^T \\ &= I_A\,\mathbf{I} - \mathbf{A}^T \\ \frac{dIII_A}{d\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^{2T} + \operatorname{tr}\mathbf{A}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) - \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}^{2T} - I_A\mathbf{A}^T + II_A\mathbf{I} \\ &= III_A\,\mathbf{I}^{-T}\end{aligned}$$

Gleichbedeutend kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\operatorname{tr}\mathbf{A}}{\mathbf{A}} &= \mathbf{I} \\ \frac{\partial\det\mathbf{A}}{\mathbf{A}} &= \det\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-T}\end{aligned}$$

4.6 Zusammenfassung für verschiedene Funktionen

Die Koordinaten eines Vektors sind definiert als die eindeutige Zuordnung von Basisvektoren und Koeffizienten.

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\mathbf{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1,\, x^2,\, x^3, \ldots) \\ \mathbf{r} &= r^i \mathbf{g}_i \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung für ein Skalarfeld $f(\mathbf{r})$ in Richtung seiner Basisvektoren lautet:

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} f(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{g}_i)|_{\epsilon \to 0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big[f(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{g}_i) - f(\mathbf{r}) \Big] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big[f(r^i + \epsilon \delta^i_j)\mathbf{g}_i - f(r^i \mathbf{g}_i) \Big]$$

Weil die Funktion f nicht von einer (konstanten) Vektorbasis abhängt, können wir allein die Argumente von f betrachten, also $f(r^i) = f(r^1,\, r^2,\, r^3, \ldots)$. Daraus folgt für die Richtungsableitung

$$\mathrm{d}f = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{g}_i = \frac{\partial f(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^i}$$

und der Gradient der Funktion $f(\mathbf{r})$ muss folglich die Form

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \mathbf{g}^j$$

haben (denn es gilt $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j$). Dann folgt wieder für die Richtungsableitung

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \underbrace{\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j}_{\delta^i_j} = \frac{\partial f}{\partial r^i}.$$

Der Gradient wird also durch die partielle Ableitung und die duale (kontravariante) Basis ausgedrückt. Mitunter bezeichnet man ihn deshalb als kontravarinte Ableitung. Verallgemeinernd könnte man nun vermuten, das der Gradient eines kontravarianten Feldes $\mathbf{r} = r_i \mathbf{g}^i$ ein gemischter Tensor 2. Stufe sei, das trifft aber nicht zu. Der Gradient wird immer mit kontravarianter Basis formuliert und eine Anwendung auf eine ebenso dargestellte Größe erzeugt entsprechend Metrikterme.
Im Folgenden fassen wir für verschiedene Funktionen die Differentialoperatoren zusammen.
reelle Funktion:

$$\begin{aligned} f: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{d}f: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Richtungsableitung:

$$\mathrm{d}f(x,\, dx) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big[f(x + \epsilon dx) - f(x) \Big] = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Die Richtungsableitung und der Gradient entsprechen der gewöhnlichen Ableitung, denn für eine reelle Funktion gibt es keine Richtung.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

reelle Vektorfunktion:

$$\begin{aligned} f: &\quad V \to \mathbb{R} \\ \mathrm{d}f: &\quad V \times \mathbb{V} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Richtungsableitung:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{r},\, d\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r}$$

Der Gradient einer reellen Vektorfunktion ist ein Vektor.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i$$

vektorwertige Vektorfunktion:

$$\begin{aligned} f :&\quad V \to V \\ \mathrm{d}f :&\quad V \times V \to V \end{aligned}$$

Richtungsableitung:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{r},\, d\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Der Gradient einer vektorwertigen Vektorfunktion ist ein Tensor 2. Stufe, $\operatorname{grad} \mathbf{f} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$.

$$\operatorname{grad} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f^k(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j \equiv \frac{\partial f^k}{\partial r^j} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^j$$

Die Divergenz einer vektorwertigen Vektorfunktion ist ein Skalar, $\operatorname{div} \mathbf{f} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \operatorname{tr}(\operatorname{grad}(\mathbf{r})) \\ &= \frac{\partial f^k(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^k} \equiv \frac{\partial f^k}{\partial r^k} \end{aligned}$$

Die Rotation einer vektorwertigen Vektorfunktion ist ein Vektor, $\operatorname{rot} \mathbf{f} \in V$.

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f^k(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \mathbf{g}^j \times \mathbf{g}_k \equiv \frac{\partial f^k}{\partial r^j} \mathbf{g}^j \times \mathbf{g}_k$$

tensorwertige Vektorfunktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} :&\quad V \to \mathbb{L}\mathrm{in} \\ \mathrm{d}\mathbf{F} :&\quad V \times V \to \mathbb{L}\mathrm{in} \end{aligned}$$

Richtungsableitung:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r},\, d\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Der Gradient einer tensorwertigen Vektorfunktion ist eine Triade.

$$\operatorname{grad} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F^{kl}(r^1,\, r^2, \ldots)}{\partial r^j} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^j$$

Die Divergenz einer tensorwertigen Vektorfunktion ist ein Vektor.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F^{kj}}{\partial r^j} \mathbf{g}_k$$

reelle Tensorfunktion:

$$\begin{aligned} f :&\quad \mathbb{L}\mathrm{in} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{d}f :&\quad \mathbb{L}\mathrm{in} \times V \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Richtungsableitung:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{A},\, d\mathbf{A}) = \operatorname{grad}\mathbf{A} : d\mathbf{A}$$

Der Gradient einer reellen Tensorfunktion ist ein Tensor.

$$\operatorname{grad}\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial f}{\partial A^{ij}}$$

Über das Skalarprodukt ergeben sich weitere Darstellungen.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\mathbf{A},\, d\mathbf{A}) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} : \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial A^{ij}} dA^{ij} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \mathrm{d}\mathbf{A}^T : \mathbf{I} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \mathrm{d}\mathbf{A}^T\right)\end{aligned}$$

Ist das Argument der reellen Tensorfunktion symmetrisch, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ und $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\mathbf{A}^T$, dann bleibt der schiefsymmetrische Anteil des Gradienten unbestimmt, d.h. der Gradient ist symmetrisch.

$$\mathrm{d}f(\mathbf{A},\, d\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial A} : \mathrm{d}\mathbf{A} = \operatorname{sym}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}\right) : \mathrm{d}\mathbf{A}$$

4.7 Rechenregeln

Für Skalarfelder $\varphi,\, \psi \in \mathbb{R}$, Vektorfelder $\mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$ und Tensorfelder $\mathbf{A},\, \mathbf{B} \in \mathbb{L}\mathrm{in}$ gelten die folgenden Regeln.
Divergenz

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi\mathbf{u}) &= \varphi \operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi \\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) &= \varphi \operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi \\ \operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{u}) &= \operatorname{div}\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{u} + \mathbf{A}^T : \operatorname{grad}\mathbf{u} \\ \operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{B}) &= \operatorname{grad}\mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{div}\mathbf{v} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) &= (\operatorname{grad}\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{u}) = \operatorname{grad}\mathbf{u} : \mathbf{I} = \operatorname{div}\mathbf{u}$$

Rotation

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{u}) &= \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{u} + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{u} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u} + (\operatorname{grad}\mathbf{u})\mathbf{v} - (\operatorname{grad}\mathbf{v})\mathbf{u}\end{aligned}$$

Gradient

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\varphi+\psi) &= (\operatorname{grad}\varphi) + \operatorname{grad}\psi \\ \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= (\operatorname{grad}\varphi)\psi + \varphi\operatorname{grad}\psi \\ \operatorname{grad}(\varphi\mathbf{u}) &= \mathbf{u}\otimes\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\mathbf{u} \\ \operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= (\operatorname{grad}^T\mathbf{u})\mathbf{v} + (\operatorname{grad}^T\mathbf{v})\mathbf{u}\end{aligned}$$

mehrfache Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) &= 0\\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) &= \triangle\varphi\\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\varphi)) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi))\\
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) &= 0\\
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \triangle\mathbf{u}\\
\operatorname{grad}(\operatorname{div}\ \mathbf{u}) &= \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}^T\ \mathbf{u}\right)\\
\triangle(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \triangle\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + 2\operatorname{grad}\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\triangle\mathbf{v}\\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathbf{u})) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathbf{u}))\\
\operatorname{div}(\operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathbf{u})) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}))\\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{rot}\mathbf{u})) &= \operatorname{rot}(\operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathbf{u}))
\end{aligned}
$$